2024

MATHEMATICS — MINOR

Paper : MN-2

(Basic Algebra)

Full Marks : 75

Candidates are required to give their answers in their own words as far as practicable.

প্রান্তলিখিত সংখ্যাগুলি পূর্ণমান নির্দেশক।

সমগ্র প্রশ্নপত্রে $\mathbb{R}$ বাস্তব সংখ্যার সেট-কে নির্দেশ করে।

সমস্ত চিহ্নের স্বাভাবিক অর্থ ধরে নিতে হবে।

বিভাগ - ক

(মান : ২৫)

১। ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২½×২

(ক) -1 -এর ঘনমূল নির্ণয় করো।

(খ) ডেকার্টের নিয়মের সাহায্যে $x^8 - 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির প্রকৃতি নির্ণয় করো।

(গ) দেখাও যে, $(n+1)^n > 2^n \cdot n!$ যেখানে n কোনো স্বাভাবিক সংখ্যা।

(ঘ) যদি $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ সমীকরণের বীজগুলি সমান্তর প্রগতিতে থাকে, তবে দেখাও যে $p^2 \geqslant 3q$.

২। ***যে-কোনো চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) যদি a, b যে-কোনো দুটি বাস্তব সংখ্যা (উভয়েই শূন্য নয়) হয়, তবে দেখাও যে $\sin\left[i \log \frac{a-ib}{a+ib}\right] = \frac{2ab}{a^2+b^2}$.

(খ) কার্ডানের পদ্ধতি দ্বারা $x^3 - 18x - 35 = 0$ সমীকরণটি সমাধান করো।

(গ) $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ সমীকরণের দুটি বীজের পরমমান সমান এবং বিপরীত চিহ্নযুক্ত হলে সমীকরণটি সমাধান করো।

(ঘ) Cauchy-Schwartz অসমতা ব্যবহার করে প্রমাণ করো যে $(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) > 16$, যেখানে a, b, c, d সবই ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা (সবাই সমান নয়)।

(ঙ) সাধারণ সমাধান (general solution) নির্ণয় করো ঃ $\cos z = 2$.

Please Turn Over

(চ) যদি a, b, c ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ করো

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}>\frac{3}{2}$$ যদি না $a = b = c$ হয়।

(ছ) $x^7 - 1 = 0$ সমীকরণের বীজগুলির 99তম ঘাতের সমষ্টি নির্ণয় করো।

বিভাগ - খ

(মান : ২৫)

৩। *যে-কোনো দুটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২½×২

(ক) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ম্যাপিং-টি এভাবে সংজ্ঞাত ঃ

$$f(x) = x^2 - 5x + 6$$

প্রমাণ করো যে f injective বা surjective কোনোটিই নয়।

(খ) দুটি পূর্ণসংখ্যা u এবং v নির্ণয় করো যাতে $54u + 24v = 30$ হয়।

(গ) 3^{2024} সংখ্যাটির একক অঙ্কটি নির্ণয় করো।

(ঘ) নিম্নলিখিত সম্পর্কটি (relation) একটি সমতুল্য সম্পর্ক (equivalence relation) কি না যাচাই করো, যেখানে $a\ R\ b$ if and only if $a - b < 5$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

৪। *যে-কোনো চারটি* প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ

(ক) 315 এবং 4235 সংখ্যাদ্বয়ের গ.সা.গু নির্ণয় করো এবং দুটি পূর্ণসংখ্যা s এবং t বের করো যাতে $\gcd(315, 4235) = 315s + 4235t$ হয়। ৫

(খ) যদি $\lfloor 1 + \lfloor 2 + \lfloor 3 + \ldots\ldots + \lfloor 100$-কে 40 দ্বারা ভাগ করা হয়, তবে ভাগশেষ নির্ণয় করো। ৫

(গ) $f \circ g$ এবং $g \circ f$ নির্ণয় করো, যেখানে $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-কে $f(x) = |x| + x, x \in \mathbb{R}$ এবং $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-কে $g(x) = |x| - x$, $x \in \mathbb{R}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয়েছে। ৫

(ঘ) Chinese remainder উপপাদ্য প্রয়োগ করে সমাধান করো ঃ

$$x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 3 \pmod 5$$
$$x \equiv 4 \pmod 7$$

(ঙ) (অ) $\phi(2024)$-এর মান নির্ণয় করো। ৫

(আ) $n^2 + n + 41$ সর্বদা একটি মৌলিক সংখ্যা, যেখানে n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা। — এটি কি ঠিক? যুক্তিসহ বিচার করো। ৩+২

(চ) যদি $A = \{2, 3, 4\}$ হয়, তবে A-র উপর সম্ভাব্য সকল relation-এর সংখ্যা নির্ণয় করো যারা reflexive এবং symmetric উভয়ই। ৫

(ছ) $A = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ এবং $f : A \to B$ ম্যাপিংটি এভাবে সংজ্ঞাত ঃ

$$f(x) = \frac{x-3}{2x+1}, \ \forall x \in A.$$

f^{-1} -এর অস্তিত্ব আছে কি? যুক্তিসহ বিচার করো। ১+৪

বিভাগ - গ

(মান : ২৫)

৫। ***যে-কোনো দুটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ২½×২

(ক) ভেক্টরের সেট $\{(1, 5, 2), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $\mathbb{R}^3$-তে রৈখিকভাবে স্বাধীন (linearly independent) কি না তা যাচাই করো।

(খ) $\mathbb{R}^3$-এর উপসেট S-এর একটি spanning সেট লেখো, যেখানে $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$.

(গ) যদি A ম্যাট্রিক্সটি invertible এবং $AB = 0$ হয়, তাহলে দেখাও যে $B = 0$ যেখানে A এবং B উভয়েই $n \times n$ বর্গ ম্যাট্রিক্স।

(ঘ) λ-এর মান নির্ণয় করো যাতে ম্যাট্রিক্স $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$-এর নিজস্ব বিপরীত (own inverse) হয়।

৬। ***যে-কোনো চারটি*** প্রশ্নের উত্তর দাও ঃ ৫×৪

(ক) নীচের ম্যাট্রিক্সটির row reduced Echelon form তৈরি করে ম্যাট্রিক্সটির rank বার করো।

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(খ) a এবং b -এর কোন্ মানের জন্য

$$x + y + z = 1$$
$$x + 2y - z = b$$
$$5x + 7y + az = b^2$$

এই system of linear equations-এর

(অ) একটিমাত্র সমাধান (unique solution) থাকবে?

(আ) কোনো সমাধান নেই (no solution)?

(ই) অসংখ্য সমাধান (many solutions) থাকবে?

(গ) প্রমাণ করো যে, $(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$ যদি A এবং B বর্গ ম্যাট্রিক্স হয় এবং A বিপরীতমুখী (invertible) হয়।

(ঘ) যদি $\{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\mathbb{R}^n$-এ রৈখিকভাবে স্বাধীন (linearly independent) সেট হয়, তবে প্রমাণ করো যে,

$\{\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma\}$ও

$\mathbb{R}^n$-এ একটি রৈখিকভাবে স্বাধীন (linearly independent) সেট।

(ঙ) $\left.\begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ x - 2y - z = 0 \end{array}\right\}$ এই system of linear equations-এর সমাধান ক্ষেত্রের (Solution space) dimension এবং basis নির্ণয় করো।

(চ) $2x - 3y + 4z = 3$, $3x + 2y - z = 4$, $5x + 3y - z = 7$ সমীকরণগুলিকে ম্যাট্রিক্স আকার $AX = B$-তে পরিণত করে সমাধান করো।

(ছ) যদি $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$ একটি সেট, যেখানে $\alpha_1 = (1, 2, 1)$, $\alpha_2 = (-3, -6, 3)$, $\alpha_3 = (2, 1, 3)$, $\alpha_4 = (8, 7, 7) \in \mathbb{R}^3$ হয়, তবে S-এর একটি subset T নির্ণয় করো যাতে $L(S) = L(T)$ হয়। এখানে $L(S)$ S-র linear span নির্দেশ করছে।

[English Version]

The figures in the margin indicate full marks.

Throughout the question paper $\mathbb{R}$ denotes the set of real numbers.
Other symbols have their usual meanings.

Group - A

(Marks : 25)

1. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Find the cube roots of -1.

(b) Apply Descartes' rule of signs to find the nature of the roots of the equation $x^8 - 1 = 0$.

(c) Show that $(n + 1)^n > 2^n \cdot n!$, where n is any positive integer.

(d) If the roots of the equation $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ are in A.P., then show that $p^2 \geqslant 3q$.

2. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) Prove that $\sin\left[i \log \dfrac{a - ib}{a + ib}\right] = \dfrac{2ab}{a^2 + b^2}$, where a, b are real numbers not both zero.

(b) Solve the equation $x^3 - 18x - 35 = 0$, by Cardan's method.

(c) Solve the equation $2x^3 - x^2 - 18x + 9 = 0$ if two of the roots are equal in magnitude but opposite in sign.

(d) Using Cauchy-Schwartz inequality, prove that

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) > 16,$$

where a, b, c, d are all positive real numbers (not all equal).

(e) Solve the equation $\cos z = 2$, where the solutions should be written in general form.

(f) a, b, c be positive real numbers, prove that

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} > \frac{3}{2}, \text{ unless } a = b = c.$$

(g) Find the sum of 99th powers of the roots of the equation $x^7 - 1 = 0$.

Group - B

(Marks : 25)

3. Answer ***any two*** questions : $2\frac{1}{2} \times 2$

(a) Suppose $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be defined by $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Prove that f is neither an injective mapping nor a surjective mapping.

(b) Find two integers u and v such that $54u + 24v = 30$.

(c) Find out the unit digit of 3^{2024}.

(d) Examine whether the relation R, defined on the set $\mathbb{Z}$ by $a\ R\ b$ if and only if $a - b < 5$, $a, b \in \mathbb{Z}$ is an equivalence relation or not.

4. Answer ***any four*** questions :

(a) Find gcd of 315 and 4235 and find integers s and t such that gcd $(315, 4235) = 315s + 4235t$. 5

(b) Find the remainder when $|\underline{1} + |\underline{2} + |\underline{3} + \cdots + |\underline{100}$ is divided by 40. 5

(c) Find $f \circ g$ and $g \circ f$, where $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $f(x) = |x| + x$, $x \in \mathbb{R}$ and $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is defined by $g(x) = |x| - x$, $x \in \mathbb{R}$. 5

(d) Solve the system of linear congruences by Chinese remainder theorem

$$x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 3 \pmod 5$$
$$x \equiv 4 \pmod 7$$

5

(e) (i) Find the value of $\phi(2024)$.

(ii) $n^2 + n + 41$ is a prime number, for all $n \in \mathbb{N}$. Is it true? Justify your answer. 3+2

(f) If $A = \{2, 3, 4\}$, then find the number of relations on A which are both reflexive and symmetric. 5

(g) Let $A = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$, $B = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, where $\mathbb{R}$ denotes the set of all real. Let $f : A \to B$ be defined by

$f(x) = \frac{x-3}{2x+1}$, for all $x \in A$. Does f^{-1} exist? Justify your answer. 1+4

Group - C

(Marks : 25)

5. Answer ***any two*** questions : 2½×2

(a) Verify whether the set of vectors $\{(1, 5, 2), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ is linearly independent or not in $\mathbb{R}^3$.

(b) Find a spanning set of the subset S of $\mathbb{R}^3$, where $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0\}$.

(c) If A is invertible and $AB = 0$, then prove that $B = 0$, where A, B both $n \times n$ (square) matrices.

(d) Find the value of λ so that the matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ is its own inverse.

6. Answer ***any four*** questions : 5×4

(a) Find the rank of the matrix by reducing it to row reduced Echelon form

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Determine the conditions for which the system $x + y + z = 1$, $x + 2y - z = b$, $5x + 7y + az = b^2$ admits of (i) only one solution, (ii) no solution, (iii) many solutions.

(c) Prove that $(A + B)A^{-1}(A - B) = (A - B)A^{-1}(A + B)$ if A and B are square matrices and A is invertible.

(d) If $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ is linearly independent set of vectors in space $\mathbb{R}^n$, then prove that $\{\alpha + \beta + \gamma, \beta + \gamma, \gamma\}$ is also a linearly independent set in $\mathbb{R}^n$.

(e) Find the dimension and basis of the solution space of the system of equations :

$$x - 2y + z = 0$$
$$x - 2y - z = 0$$

(f) Transfer the system of equation $2x - 3y + 4z = 3$, $3x + 2y - z = 4$, $5x + 3y - z = 7$ to a matrix equation $AX = B$. Hence, solve the system by using the properties of matrix.

(g) Find a linearly independent subset T of the set $S = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$, where $\alpha_1 = (1, 2, 1)$, $\alpha_2 = (-3, -6, 3)$, $\alpha_3 = (2, 1, 3)$, $\alpha_4 = (8, 7, 7) \in \mathbb{R}^3$ which spans the same space as S.